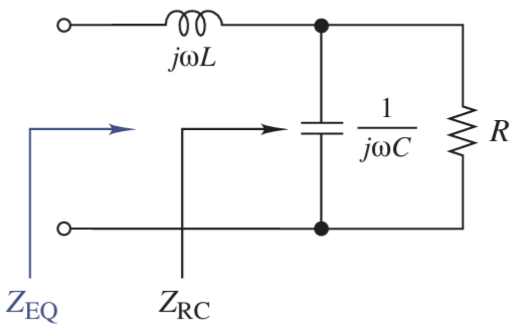
Série N0 : RLC analyse fréquentielle (révision)

Ex.1 Fréquence de résonance



Le circuit de la figure fonctionne en régime sinusoïdal permanent avec R = 1 kΩ, L = 200 mH et C = 1 µF.

a- Déterminez l'expression théorique puis la valeur numérique de ω_o qui mettra le circuit en résonance.

Ecrivant l'impédance équivalente sous forme: $\underline{Z}_{EQ} = R_{EQ} + j\underline{X}_{EQ}$

$\underline{Z}_{EQ} = j\omega L + \underline{Z}_{RC}$ avec $\underline{Z}_{RC} = \underline{Z}_C \,//\, R = \frac{R\,{}^{1}/_{j\omega C}}{R+{}^{1}/_{j\omega C}} = \frac{R}{1+j\omega RC}$

$$\rightarrow \underline{Z}_{EQ} = j\omega L + \frac{R}{1+j\omega RC} = \frac{j\omega L(1+(\omega RC)^2)+R(1-j\omega RC)}{1+(\omega RC)^2} = \frac{R}{1+(\omega RC)^2} + j\left[\omega L - \frac{j\omega R^2 C}{1+(\omega RC)^2}\right]$$

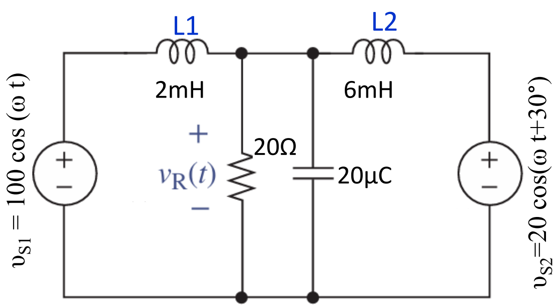
A la fréquence de fréquence ω_o, l'impédance Z_{EQ} est purement résistive c.à.d. $X_{EQ} = 0$

$$\rightarrow X_{EQ}(j\omega_o) = 0 \Rightarrow L(1+(\omega_0 RC)^2) - R^2C = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega_0} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{R^2CL^{-1}-1}}}{\boldsymbol{RC}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{LC}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{(RC)^2}}}$$

b- Quelle sera la valeur de Z_{EQ} dans ces conditions ?

AN : $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{200\ 10^{-3}10^{-6}} - \frac{1}{(10^3 10^{-6})^2}} = 2\,{}^{krad}/_{s}$ et $\underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{EQ}} = \frac{\mathbf{10^3}}{\mathbf{1+(2\ 10^3\ 10^3\ 10^{-6})^2}}$ **= 200 Ω**

Ex.2 Superposition



Trouver la tension à l'équilibre $v_R(t)$. La fréquence des sources est ω=5 krad/s.

Superposition →

$$v_R(t) = \underbrace{\frac{Z_c\,//\,Z_{L2}\,//\,R}{Z_{L1}+Z_c\,//\,Z_{L2}\,//\,R} v_{s1}(t)}_{v_{s2}(t)=0} + \underbrace{\frac{Z_c\,//\,Z_{L1}\,//\,R}{Z_{L2}+Z_c\,//\,Z_{L1}\,//\,R} v_{s2}(t)}_{v_{s1}(t)=0}$$

En phaseur : $V_{s1} = 100$ V et $V_{s2} = 20\cos(30°) + j20\sin(30°) = 17.32 + j10$

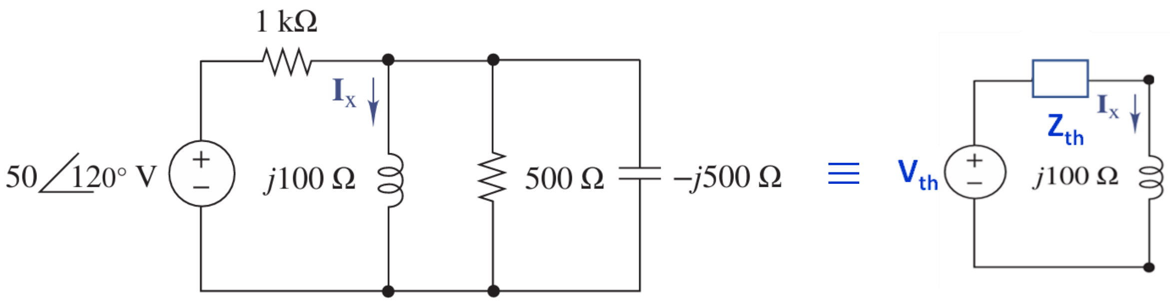
$$Z_c\,//\,Z_{L2}\,//\,R = \left(jc\omega + \frac{1}{jL_2\omega} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \left(j20\ 10^{-6}5\ 10^3 + \frac{1}{j6\ 10^{-3}5\ 10^3} + \frac{1}{20}\right)^{-1} = 7.2 - j\,9.6\ \Omega$$

$$Z_c\,//\,Z_{L1}\,//\,R = \left(jc\omega + \frac{1}{jL_1\omega} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \left(j20\ 10^{-6}5\ 10^3 + \frac{1}{j2\ 10^{-3}5\ 10^3} + \frac{1}{20}\right)^{-1} = 20\ \Omega$$

Phaseur:

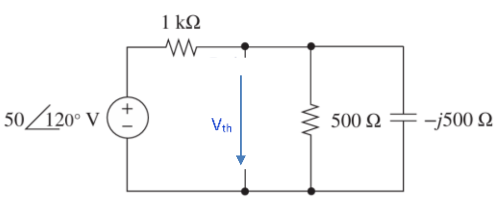
$V_R = \frac{7.2 - j\,9.6\ \Omega}{\underbrace{j10}_{Z_{L1}}+7.2 - j\,9.6\ \Omega}100 + \frac{20}{\underbrace{j30}_{Z_{L2}}+20}(17.32 + j10) = 102.25 - j143.38 = 176.1\angle{-54.5}$ → $\boldsymbol{v_R}(\mathbf{t}) = \mathbf{176.1}$ **cos (5000 t - 54.5°) V**

Ex.3 Théorème de Thévenin



a- Trouvez le circuit équivalent de Thévenin vu par l'inducteur.

b- Utilisez l'équivalent de Thévenin pour calculer le courant I_X.

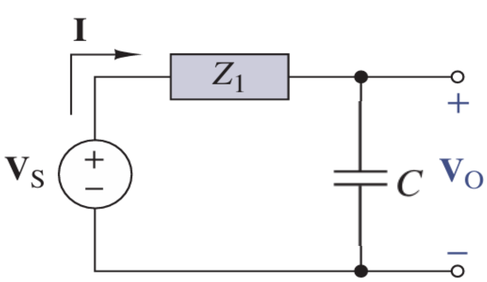


a- $V_{th} = \frac{500 // -j\,500\ \Omega}{10^3 + 500 // -j\,500\ \Omega} 50\angle 120° = 0.089 + j\,1.38\text{V}$

Z_{th} = $\mathbf{10^3 // 500 // -j\,500\ \Omega}$ = $230.77 - j\,153.8\ \Omega$

b- $I_x = \frac{\mathbf{V_{th}}}{Z_{th}+Z_L} = -9.6\ 10^{-4} + j57.7\ 10^{-4} = 5.85 mA\angle 99.48°$

Ex.4 Conception et diviseur de tension



Trouvez Z_1 de sorte qu'une entrée $\upsilon_S(t) = 50 \cos(2000t)$ produise une sortie $\upsilon_O(t) = 25 \cos(2000t - 30°)$ au borne d'une capacité de 0,5 µF.

Rappel : Z = R+jX. X (la réactance) est soit positive (une inductance) soit négative (un condensateur), R (la résistance) doit être positive.

Diviseur de tension donne : $\frac{V_o}{V_s} = \frac{Z_c}{Z_c + Z_1} \rightarrow Z_1 = Z_c\left(\frac{V_s}{V_o} - 1\right) = \frac{1}{j2\ 10^3\ 0.5\ 10^{-6}}\left(\frac{50\angle 0°}{25\angle -30°} - 1\right) = 10^3 - j\ 732.05$

Ce qui correspond à une résistance de 1 kΩ en série avec une capacité C = $(2\ 10^3 \times 732.05)^{-1}$ = 0.68 µF.

Ex.5 Conception et Fréquence de résonance

Un circuit fonctionne en régime sinusoïdal permanent avec ω = 377 rad/s. Une charge Z_L = 327∠63.4° Ω doit être connectée au circuit. Il est souhaitable que la charge soit rendue purement résistive par l'ajout d'une réactance de compensation. Calculer la réactance et dessiner le circuit (charge et compensation) en donnant la nature et la valeur de tous ses éléments.

Z_L = 327∠63.4° Ω = 146.4 + j 292.39 Ω (≡ une résistance en série avec une inductance). Pour rendre la charge purement résistive il faut ajouter une capacité en série donnant une réactance X_C = -j 292.39. Cela correspond à une capacité $C = (|X_C|\,\omega)^{-1}$ = 9µF.